

Météorologie : Instrumentation permettant la caractérisation des précipitations de pluie.

Météo-France gère des stations météorologiques sur l'ensemble du territoire français. Ces stations collectent des données variées (pression, humidité, vent, pluie, état du sol...) pour alimenter les modèles numériques de prévision du temps, aider les prévisionnistes et renseigner sur le climat.

Ce sujet décrit le principe de fonctionnement de trois appareils que l'on peut retrouver dans ces stations : le premier appareil permet de caractériser l'état du sol ; les deux suivants permettent, entre autres, de mesurer l'intensité des précipitations dans le cas de la pluie, sur place (pour le disdromètre) ou à distance (pour le radar).

Les **trois parties** de ce sujet sont **totalemment indépendantes** :

- **Partie I** : Caractérisation objective de l'état du sol, à l'aide de l'appareil Solia
- **Partie II** : Étude d'un disdromètre
- **Partie III** : Étude d'un radar météorologique.

Partie I - Caractérisation objective de l'état du sol, à l'aide de l'appareil Solia

Présentation de l'appareil Solia : l'appareil Solia permet de caractériser l'état du sol (sol sec, humide, mouillé, inondé, recouvert de neige ou verglacé), cette information étant d'une grande importance dans certaines applications météorologiques bien définies telles que l'assistance aux transports terrestres. Pour ce faire, l'appareil étudie les propriétés optiques d'une plaque de référence posée horizontalement sur le sol. Ces propriétés évoluent en fonction d'éventuels hydrométéores (pluie, brouillard, neige, verglas...) qui se déposeraient dessus.



FIGURE 1: Photographie de l'appareil Solia [1].

Objectifs de la partie I : une plaque mouillée par la pluie reçoit, de la part de l'émetteur Solia, une onde lumineuse. Cette onde va successivement rencontrer de l'air, puis une pellicule d'eau et enfin la plaque de référence absorbante. La partie I décrit de manière générale le comportement de l'onde lors du trajet précédemment décrit : la sous-partie A décrit la traversée d'un dioptre air/eau ou eau/air par cette onde lumineuse (direction et répartition de l'énergie), la sous-partie B revient sur le comportement

1. J.-L. Gaumet et P. Salomon. Solia, un nouvel instrument météorologique pour caractériser l'état du sol. *La Météorologie 8ème série*, n°24, décembre 1998.

de l'onde lorsqu'elle rencontre la plaque absorbante, la sous-partie C analyse des résultats obtenus avec l'appareil Solia.

A. TRAVERSÉE D'UN DIOPTRE SÉPARANT DEUX MILIEUX TRANSPARENTS

A.1. Prédiction de la direction des ondes incidente, réfléchi, réfractée

Soit un dioptre séparant deux milieux transparents caractérisés par des indices optiques réels n_1 et n_2 . Un rayon lumineux incident arrive depuis le milieu d'indice n_1 en S (rayon incident contenu dans le plan $y=0$, voir figure 2) en faisant un angle i par rapport à la normale au dioptre et donne naissance à un rayon réfléchi et un rayon réfracté. On note i' l'angle de réflexion et i_r celui de réfraction, les angles ne seront pas orientés.

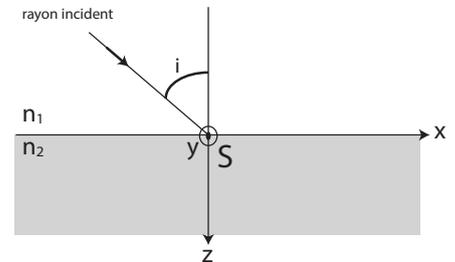


FIGURE 2: Notations

1. Reproduire la figure 2 et faire apparaître les rayons réfléchis et réfractés, ainsi que les angles i' et i_r . Énoncer les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction du rayon lumineux incident en S .

Pour les questions suivantes, on donne les valeurs moyennes des indices optiques de l'air et de l'eau dans le visible : $n_{air} = 1,00$ et $n_{eau} = 1,33$.

2. Cas du dioptré air/eau : comparer les angles i et i_r . Décrire ce qui se passe lorsque l'angle d'incidence i augmente. Évaluer numériquement la valeur limite prise par l'angle approprié.
3. Reprendre l'étude de la question 2 dans le cas du dioptré eau/air.
4. On constate que l'indice optique de l'eau dépend de la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse. Comment nomme-t-on ce phénomène ? Citer une manifestation de ce phénomène.

A.2. Répartition de la puissance lumineuse de l'onde incidente entre les ondes réfléchi et réfractée (ou transmise)

Tout point M de l'espace est repéré à l'aide d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et l'indice optique réel du milieu est noté n_1 (voir figure 3). On considère une onde lumineuse plane progressive harmonique polarisée rectilignement et on note le champ électrique associé sous la forme :

$$\vec{E}_i(M) = E_{0i} \cos(\omega t - k_i \cdot z) \vec{u}_y$$

avec $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_z$, $k_i > 0$ et où E_{0i} est une constante.

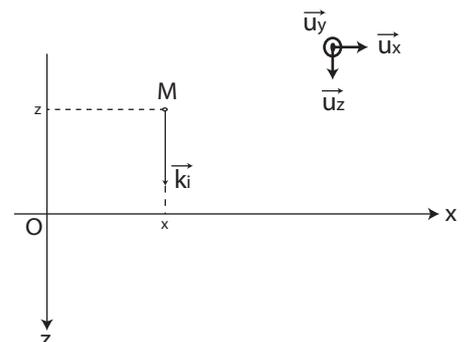


FIGURE 3: Notations

5. Préciser pour l'onde lumineuse, sa direction de polarisation et sa direction de propagation.
6. Le champ électrique associé à cette onde lumineuse satisfait l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 n_1^2 \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2}$$

où ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du vide.

Établir la relation liant la norme k_i de son vecteur d'onde \vec{k}_i à l'indice optique du milieu n_1 , à la pulsation ω et à la célérité des ondes lumineuses dans le vide c .

L'onde lumineuse précédente rencontre au point S un dioptre séparant deux milieux d'indices optiques réels respectifs n_1 et n_2 , avec $n_1 \neq n_2$ (voir figure 4). En notation complexe, les champs électriques \vec{E}_i , \vec{E}_r et \vec{E}_t sont respectivement associés aux ondes incidente, réfléchie et transmise. Ils s'écrivent :

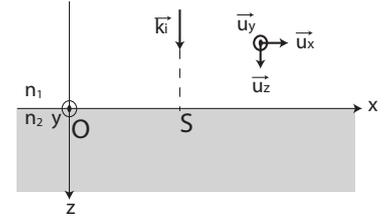


FIGURE 4: Notations

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_{0i} e^{j(\omega t - k_i \cdot z)} \vec{u}_y, \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t + k_r \cdot z)} \text{ avec } \vec{E}_{0r} = E_{0rx} \vec{u}_x + E_{0ry} \vec{u}_y \text{ et } k_r = \|\vec{k}_r\|, \\ \text{et } \vec{E}_t &= \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - k_t \cdot z)} \text{ avec } \vec{E}_{0t} = E_{0tx} \vec{u}_x + E_{0ty} \vec{u}_y \text{ et } k_t = \|\vec{k}_t\|. \end{aligned}$$

En exploitant la continuité des champs électrique et magnétique à l'interface $z = 0$, on admettra que l'on peut établir les quatre relations suivantes :

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0ry} = E_{0ty} & \text{relation [1]} \\ E_{0rx} = E_{0tx} & \text{relation [2]} \\ -\frac{n_1}{c} E_{0rx} = \frac{n_2}{c} E_{0tx} & \text{relation [3]} \\ -\frac{n_1}{c} E_{0i} + \frac{n_1}{c} E_{0ry} = -\frac{n_2}{c} E_{0ty} & \text{relation [4]} \end{cases}$$

7. En exploitant deux des relations précédentes, montrer que les ondes réfléchie et transmise ont même direction de polarisation que l'onde incidente.
8. En exploitant les deux autres relations, calculer littéralement les coefficients de réflexion et transmission en amplitude définis respectivement par :

$$r = \frac{\|\vec{E}_{0r}\|}{E_{0i}} \quad \text{et} \quad t = \frac{\|\vec{E}_{0t}\|}{E_{0i}}$$

On définit, au niveau de l'interface $z = 0$, le coefficient de réflexion R (respectivement de transmission T) en puissance comme le rapport du flux lumineux réfléchi ϕ_r (respectivement transmis ϕ_t) sur le flux lumineux incident ϕ_i :

$$R = \frac{\phi_r}{\phi_i} \quad \text{et} \quad T = \frac{\phi_t}{\phi_i}$$

Pour calculer les différents flux lumineux ϕ_i , ϕ_r ou ϕ_t à l'interface $z = 0$, on donne la relation suivante :

$$\phi = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{n}{c} \vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

où \vec{E} est le champ électrique complexe, évalué à l'interface $z = 0$, associé à l'onde lumineuse dont on calcule le flux lumineux ϕ , \vec{E}^* est le complexe conjugué de \vec{E} , et n est l'indice optique du milieu dans lequel se propage l'onde lumineuse d'intérêt.

9. Montrer que :

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

B. TRAVERSÉE D'UN DIOPTRE SÉPARANT UN MILIEU TRANSPARENT ET UN MILIEU ABSORBANT, EN INCIDENCE NORMALE

Une onde lumineuse incidente arrive, en incidence normale, sur un dioptre séparant un milieu d'indice n_1 réel d'un milieu absorbant (voir figure 5). Ce milieu absorbant peut être caractérisé par un indice optique complexe $\underline{N} = n_{re} - jn_{im}$ avec $n_{im} > 0$ et $j^2 = -1$. Dans ce milieu absorbant, l'onde lumineuse admet un vecteur d'onde complexe satisfaisant la relation :

$$\underline{k} = \underline{N} \frac{\omega}{c}$$

En notation complexe, les champs électriques associés respectivement à l'onde incidente et à l'onde transmise s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - k_i \cdot z)} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot z)}$$

10. Décrire la forme de l'onde transmise dans le milieu absorbant : on donnera pour cela l'expression du champ électrique réel associé à l'onde transmise et on définira une longueur caractéristique δ dont on précisera la signification.

Des raisonnements très similaires à ceux déjà conduits dans le cas de milieux transparents, permettent d'établir l'expression du coefficient de réflexion en puissance dans le cas d'une incidence normale entre deux milieux respectivement d'indice n_1 réel et \underline{N} complexe :

$$R = \left| \frac{\underline{N} - n_1}{\underline{N} + n_1} \right|^2 = \frac{(n_{re} - n_1)^2 + n_{im}^2}{(n_{re} + n_1)^2 + n_{im}^2}$$

11. Décrire qualitativement comment évolue la puissance réfléchie lorsque l'absorption du milieu devient très importante.

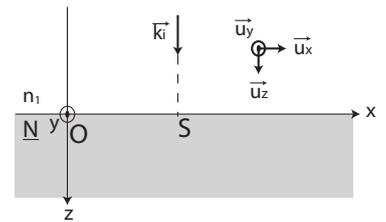


FIGURE 5: Notations

C. APPLICATION À L'ÉTUDE DE L'APPAREIL SOLIA

Dans la nature, peu de surfaces naturelles sont planes (rides sur l'eau, sol herbeux, matériaux urbains rugueux). L'appareil Solia utilise donc une surface de référence rugueuse et relativement absorbante (plaque de ciment sombre).

Nous traiterons cette surface rugueuse comme une succession de surfaces planes possédant des orientations aléatoires, chacune d'entre elles permettant une réflexion respectant les lois de Snell-Descartes (voir figure 6). Ces réflexions aléatoires donneront naissance à un flux réfléchi et un flux diffusé dans toutes les directions.

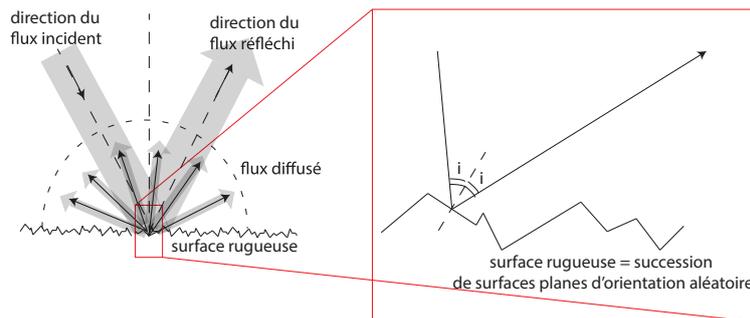


FIGURE 6: Flux lumineux rencontrant une surface rugueuse.

La partie C.1. étudie l'importance de l'absorption de la lumière par cette plaque de référence, tantôt sèche, tantôt mouillée. On souhaite en particulier justifier une observation régulièrement faite à l'œil : une surface mouillée paraît plus sombre que lorsqu'elle est sèche. La partie C.2. étudie ensuite quelques relevés réalisés à l'aide de l'appareil Solia pour caractériser l'état de surface de la plaque de référence.

C.1. Importance de l'absorption de la lumière par la plaque en fonction de son état (sec ou mouillé)

Présentation du modèle

Leckner et Dorf [2] ont proposé le modèle suivant pour calculer la proportion du flux incident absorbée par la plaque mouillée.

2. J. Leckner and M. C. Dorf. Why some things are darker when wet. *Applied Optics*, 27(7), april 1988.

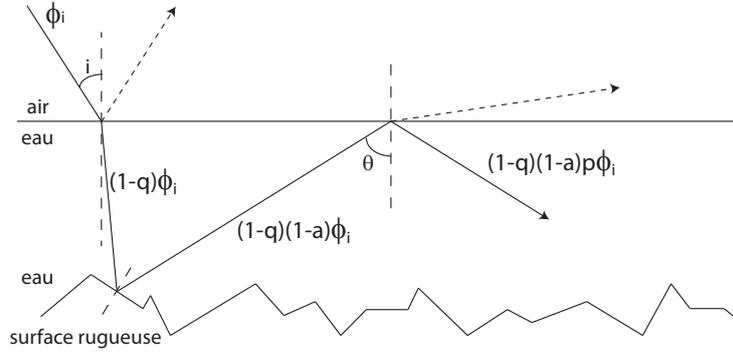


FIGURE 7: Devenir d'un rayon lumineux rencontrant une plaque rugueuse mouillée

On note :

ϕ_i le flux lumineux incident,

q : proportion du flux incident qui est réfléchi par le dioptré air/eau. On ne considérera ici que des angles d'incidence i faibles, on supposera donc que q est constant et égal à sa valeur pour $i = 0$,

a : proportion du flux atteignant la surface rugueuse et qui est absorbée par la surface,

p : proportion du flux réfléchi par la surface rugueuse, atteignant le dioptré eau/air et à nouveau réfléchi en direction de la surface rugueuse,

Sur la figure 7, on a limité la représentation du rayon lumineux aux deux premières réflexions sur la surface rugueuse et sur le dioptré eau/air, le processus se poursuit néanmoins.

12. En s'appuyant sur les résultats de la partie A.2. précédente, exprimer q en fonction de n_{air} et n_{eau} . Faire l'application numérique et commenter au regard de votre expérience.
13. Exprimer le flux absorbé lors de la première réflexion sur la surface rugueuse en fonction de a , q et ϕ_i . Exprimer de même le flux absorbé lors de la deuxième réflexion sur la surface rugueuse en fonction de a , q , p et ϕ_i . En tenant compte de toutes les réflexions successives possibles sur la surface rugueuse, montrer que le flux total absorbé par la surface rugueuse, noté ϕ_a , s'écrit :

$$\phi_a = A.\phi_i \text{ avec } A = \frac{(1-q)a}{1-(1-a)p}$$

On fournit pour cela le résultat de la somme suivante : $\sum_{i=0}^{+\infty} (1-a)^i p^i = \frac{1}{1-(1-a)p}$

Calcul du facteur p

Angström [3] propose le modèle suivant pour l'évaluation de p : les rayons lumineux qui pourront être réfléchis au niveau de l'interface eau/air sont ceux arrivant sur le dioptré avec un angle d'incidence supérieur à un angle critique $\theta_c = \arcsin(n_{air}/n_{eau})$.

3. A. Angström. The albedo of various surfaces of ground. *Geografiska Annaler*, 7(323-342), 1925.

14. Expliquer cette proposition. Ce calcul risque-t-il de sous-évaluer ou sur-évaluer p ? Justifier.

Angström fait alors l'hypothèse que la surface se comporte comme un diffuseur lambertien et montre que, dans ce cadre, p vaut : $p = \cos^2 \theta_c$.

15. Exprimer finalement p en fonction de n_{eau} et n_{air} . Faire l'application numérique.

Calcul du facteur a

Le facteur a sera noté a_s lorsque la surface rugueuse est sèche : ainsi a_s correspond à la proportion absorbée du flux incident par la surface rugueuse sèche. De même, a_m correspondra à la même proportion lorsque la surface est mouillée. On notera respectivement n_{air} , n_{eau} , $\underline{N} = n_{re} - jn_{im}$ les indices optiques de l'air, de l'eau et de la surface rugueuse (complexe dans ce dernier cas).

16. En s'appuyant sur les résultats de la partie B., donner l'expression littérale de a_s dans le cas d'une incidence normale. Faire l'application numérique pour une plaque rugueuse d'indice complexe $\underline{N} = 2,0 - j \times 2,6$.
17. En s'appuyant sur les résultats de la partie B., donner l'expression littérale de a_m dans le cas d'une incidence normale et lors d'une **unique** interaction avec la surface rugueuse. Donner alors, en fonction de q , p et a_m , l'expression littérale du facteur A défini à la question 13 et correspondant à la proportion du flux incident sur la surface rugueuse mouillée et étant absorbée après de **multiples** interactions avec la surface. Faire les applications numériques pour a_m et A pour une plaque rugueuse d'indice complexe $\underline{N} = 2,0 - j \times 2,6$.
18. En comparant les grandeurs appropriées, justifier qu'une surface mouillée apparaît plus sombre que lorsqu'elle est sèche.

C.2. Caractérisation de l'état de surface de la plaque de référence

On revient sur le fonctionnement de l'appareil Solia (voir figure 8) : une source lumineuse visible émet en direction de la surface de référence, utilisée comme cible. Cette dernière réfléchit une fraction de la lumière par réflexion spéculaire suivant les lois de Snell-Descartes, en diffuse une autre fraction dans toutes les directions (du fait de la rugosité de la surface) et, enfin, absorbe le reste. Le flux de lumière diffusé $\phi_{D,\theta}$ dépend de l'angle de diffusion θ , du type d'hydrométéore déposé, ainsi que de la rugosité de la plaque de référence. Ainsi, une surface très rugueuse augmentera la lumière diffusée dans toutes les directions au détriment de la lumière réfléchie. Au contraire, une surface plane entraînera une

intensification de la lumière réfléchi au détriment de celle diffusée [4].

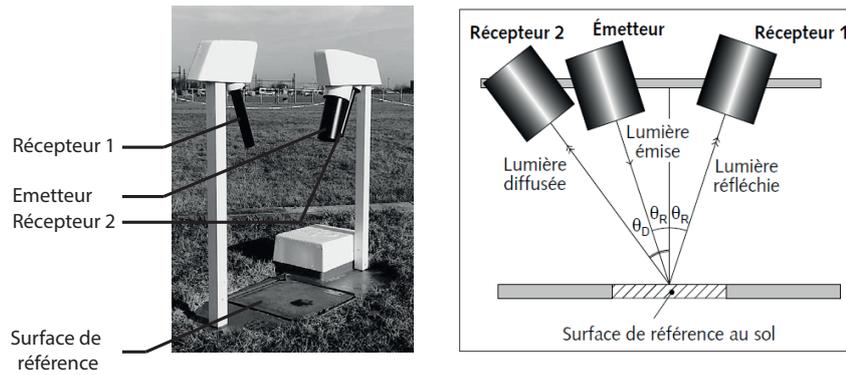


FIGURE 8: À gauche : appareil Solia. À droite : schéma de principe du dispositif d'identification de l'état du sol.

On note :

ϕ_i le flux de lumière incident,

ϕ_R le flux de lumière réfléchi selon les lois de Snell-Descartes,

$\phi_{D,\theta}$ le flux de lumière diffusé dans la direction θ ,

$\phi_{D,T}$ le flux diffusé total, dans toutes les directions,

ϕ_a le flux total absorbé par la surface,

On admet que le flux $\phi_{D,\theta}$ est relié au flux total diffusé par la relation : $\phi_{D,\theta} = k \cdot \phi_{D,T}$ avec $k \in [0; 1]$,

k correspond à la fraction de lumière rétro-diffusée pour un angle θ .

19. Traduire la conservation du flux lumineux.

On note ϕ_1 et ϕ_2 les flux enregistrés respectivement par les récepteurs 1 et 2 (voir figure 8).

20. Donner les expressions de ϕ_1 et ϕ_2 en fonction des différents flux présentés ci-dessus. En déduire une relation approchée liant ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_R sachant que $\theta_R \approx \theta_D$ (on se référera à la figure 8 pour la définition de θ_R et θ_D).

21. On présente ci-après (figure 9, à gauche) un enregistrement des signaux reçus par les récepteurs 1 et 2, ainsi que l'état de surface observé. L'indice d'état du sol varie de 1 à 5 en fonction de l'humidité (1 : sol sec, 5 : sol recouvert d'eau). Justifier l'allure des signaux lorsque le sol est sec, puis lorsque le sol est mouillé.

4. J.-L. Gaumet et P. Salomon. Solia, un nouvel instrument météorologique pour caractériser l'état du sol. *La Météorologie 8ème série*, n°24, décembre 1998.

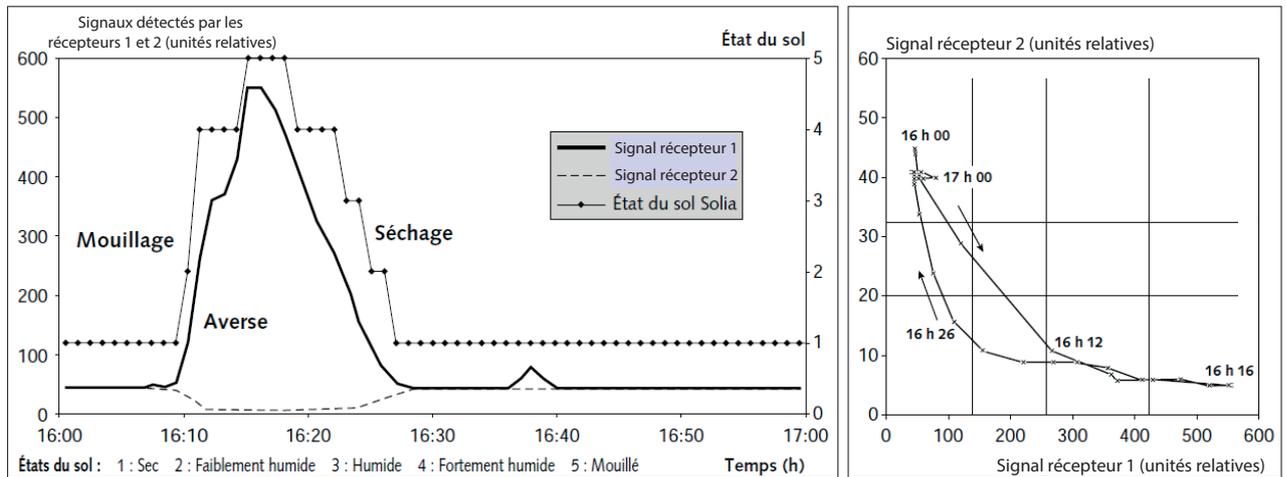


FIGURE 9: À gauche : évolution temporelle des signaux reçus par les récepteurs 1 et 2 au cours d'un épisode caractérisé par une averse de pluie (10 juin 1996). À droite : représentation du signal reçu par le récepteur 2 en fonction du signal reçu par le récepteur 1 au cours du même épisode pluvieux.

D'après les calculs menés dans la partie C.1. pour une surface mouillée, le flux ϕ_a est indépendant de l'épaisseur de la pellicule d'eau, tant que l'épaisseur de la pellicule d'eau reste supérieure à la taille caractéristique des rugosités de la surface.

22. Résolution de problème : à l'aide du document précédent (figure 9, à droite), estimer, par une lecture graphique appropriée, l'ordre de grandeur de la fraction de lumière rétro-diffusée k pour un angle θ_D .

Partie II - Étude d'un disdromètre

Présentation d'un disdromètre mécanique : il s'agit d'un instrument utilisé au sol en météorologie (voir photographie ci-contre). Lorsqu'un hydrométéore tombe sur la surface sensible du disdromètre solidaire d'un capteur piézo-électrique, un signal électrique proportionnel à la force de l'impact est induit aux bornes de ce capteur.

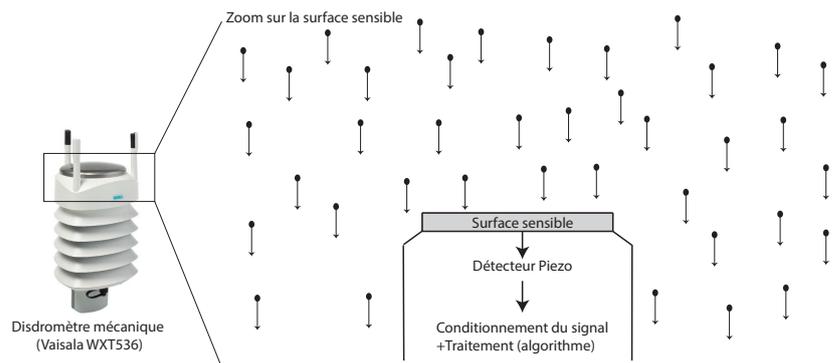


FIGURE 10: Principe d'un disdromètre mécanique

L'étude de ce signal permet d'identifier le type d'hydrométéores tombant sur sa surface sensible (pluie, bruine, neige, grêle...) et, dans le cas de la pluie, de mesurer la répartition statistique des tailles de gouttes et de calculer l'intensité de la pluie. On se restreint par la suite au cas de gouttes de pluie.

Objectifs de la partie II : la sous-partie A vise à établir un lien entre la vitesse limite atteinte par de très petites gouttelettes en chute libre (cas d'un brouillard) et leur rayon, la sous-partie B reprend

cette étude dans le cas d'une pluie modérée (gouttes de plus grande taille), la sous-partie C propose une estimation de la force exercée par une goutte de pluie sur la surface sensible du disdromètre, et montre comment remonter alors à la mesure de l'intensité de la pluie.

A. MESURE DE LA VITESSE LIMITE ATTEINTE PAR DE TRÈS PETITES GOUTTE- LETTES (CAS D'UN BROUILLARD)

A.1. Modélisation du problème

On considère une très petite gouttelette d'eau de masse volumique ρ_e constante, assimilée à une sphère dure de rayon R . Celle-ci est en chute libre à la vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$ dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_t supposé galiléen, \vec{u}_z étant un vecteur unitaire vertical descendant. L'atmosphère sera supposée homogène, de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η constantes.

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds Re associé à la gouttelette lors de sa chute :

$$Re = \frac{\rho_a D v}{\eta}, \text{ où } D \text{ est le diamètre de la gouttelette}$$

23. Quelle information le nombre de Reynolds donne-t-il sur l'écoulement de l'air autour de la gouttelette ?

La force de traînée qu'exerce l'air sur la gouttelette a pour expression :

$$\vec{F}_f = -\frac{1}{2}\rho_a \cdot S \cdot C \cdot v^2 \vec{u}_z$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air, S la surface de la gouttelette projetée perpendiculairement à l'axe de la chute, C le coefficient de traînée et v la vitesse de la gouttelette dans \mathcal{R}_t . La figure 11 donne l'évolution du coefficient de traînée C en fonction du nombre de Reynolds Re .

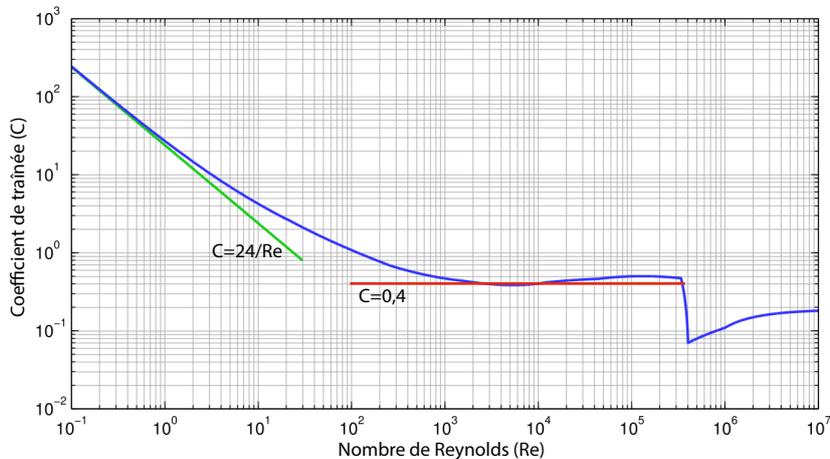


FIGURE 11: Évolution du coefficient de traînée C en fonction du nombre de Reynolds Re

24. On suppose que, dans le cas de très petites gouttelettes, la relation $C = \frac{24}{Re}$ est satisfaite. Quelle hypothèse fait-on ici sur la nature du régime d'écoulement de l'air autour de la gouttelette? Montrer alors que la force de traînée dépend linéairement de la vitesse.

On suppose que la force gravitationnelle ne varie pas avec l'altitude et que l'on peut négliger la rotation propre de la Terre. L'intensité du champ de pesanteur est supposée égale à $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

25. Établir le bilan des forces exercées sur la gouttelette au cours de sa chute et préciser leur expression. Justifier que l'on peut négliger ici la poussée d'Archimède. Données : $\rho_a = 1,22 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_e = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.
26. Établir l'équation différentielle régissant la vitesse de chute de la gouttelette et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_t$$

Donner les expressions littérales de τ et v_t uniquement à l'aide des grandeurs R , ρ_e , η et g . Préciser la signification physique de τ et v_t .

27. Résoudre l'équation différentielle précédente en supposant que la gouttelette quitte la base d'un nuage à un instant $t = 0$ avec une vitesse négligeable, l'altitude de cette base correspondant à l'origine de l'axe vertical descendant. Tracer qualitativement v en fonction de t .
28. Calculer l'expression littérale de la position verticale de la gouttelette, notée $z(t)$, à l'instant t . A quel instant t_0 la vitesse de la gouttelette diffère-t-elle de moins de 5% de la valeur v_t ? Calculer littéralement la hauteur de chute H correspondante.
29. Pour une gouttelette de diamètre $D = 80 \text{ }\mu\text{m}$ (brouillard), calculer numériquement τ , v_t et H . Données : $\eta = 1,81.10^{-5} \text{ Pl}$, $\rho_a = 1,22 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_e = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Commenter a posteriori la pertinence de l'hypothèse formulée sur le coefficient de traînée C .
30. Que vaut la vitesse de la gouttelette lors de son impact avec le disdromètre? Comment est-elle reliée à son rayon R ? A quelle condition portant sur le logarithme décimal de la masse m des gouttelettes, avec m exprimée en μg , la relation précédente reste-t-elle valide?

A.2. Validation expérimentale

On se base sur l'étude expérimentale menée par Gunn et Kinzer [5] en 1949 : ces chercheurs ont mesuré la vitesse limite de plus de 1500 gouttes de masse allant de $0,2 \text{ }\mu\text{g}$ à $100 \times 10^3 \text{ }\mu\text{g}$.

5. G. D. Kinzer and R. Gunn. The terminal velocity of fall for water droplets in stagnant air. *Journal of Meteorology* 6(243-248), august 1949.

Le graphique suivant présente les mesures de vitesse limite v_t réalisées pour des gouttes de très petites tailles, en fonction du logarithme décimal de la masse de celles-ci, exprimée en μg . La courbe en pointillés correspond à la modélisation proposée dans les questions précédentes, en utilisant l'expression de la force de traînée linéaire en la vitesse établie à la question 24.

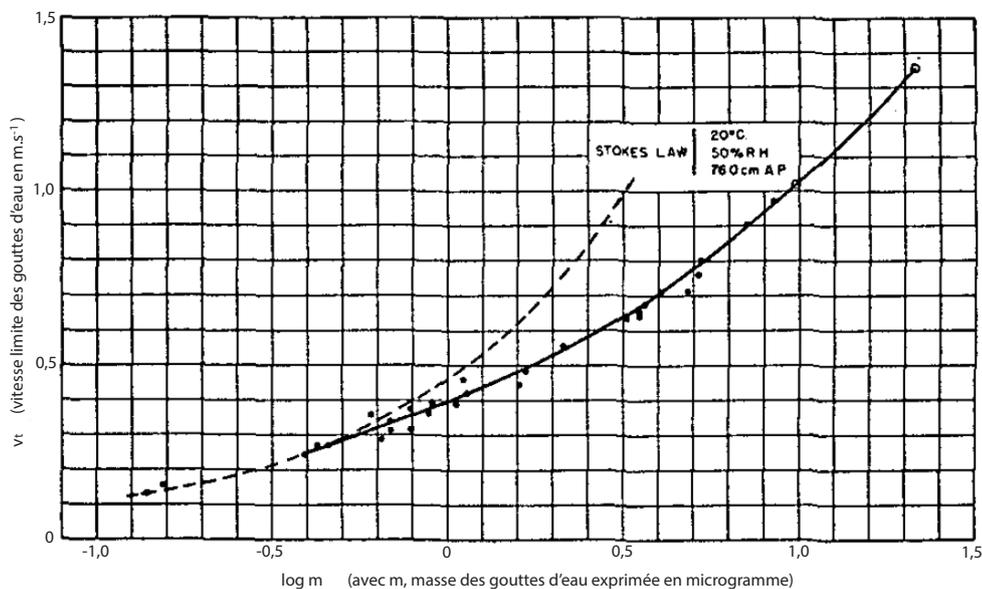


FIGURE 12: Tracé expérimental de la vitesse limite de gouttes en fonction du logarithme décimal de leur masse exprimée en μg .

31. Commenter ce graphe au regard de votre précédente étude.

B. MESURE DE LA VITESSE LIMITE ATTEINTE PAR DES GOUTTES DE PLUIE DE RAYON $R = 2,0 \text{ mm}$ (CAS D'UNE PLUIE MODÉRÉE)

B.1. Une première modélisation de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$

32. Proposer un ordre de grandeur pour la vitesse limite d'une goutte de pluie de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$. Calculer alors le nombre de Reynolds correspondant et en déduire la nature du régime de l'écoulement de l'air autour de la goutte. On supposera que ce régime perdure tout au long de la chute de la goutte.
33. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse de chute d'une goutte en fonction du temps. En déduire l'expression littérale de la vitesse limite v_t en fonction de la masse volumique de l'eau ρ_e , celle de l'air ρ_a , l'intensité du champ de pesanteur g , le rayon de la goutte R et le coefficient de traînée C supposé constant (et égal à 0,4, voir figure 11).

Une résolution numérique de cette équation permet de construire deux graphes : la courbe représentative de $\frac{v}{v_t}$ en fonction de la variable adimensionnée $\frac{g}{v_t} \times t$, ainsi que la courbe représentant la hauteur de chute H (en mètre) en fonction de $\frac{g}{v_t} \times t$.

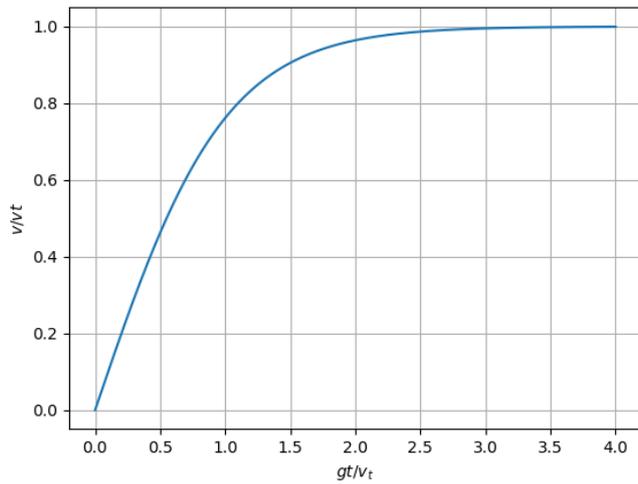


FIGURE 13: Courbe représentative du rapport de vitesse $\frac{v}{v_t}$ en fonction de $\frac{gt}{v_t}$

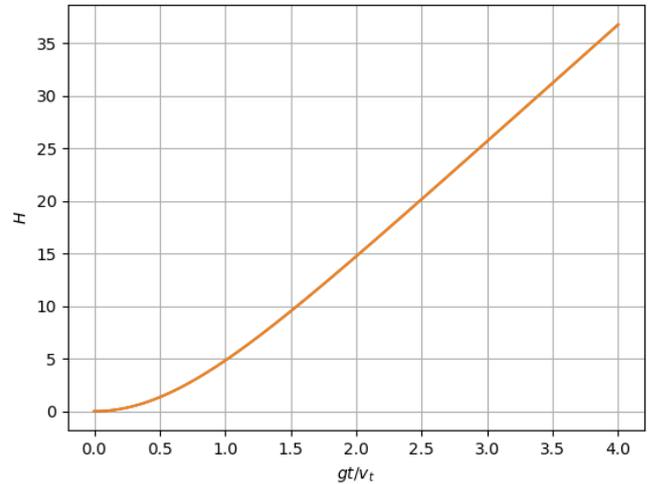


FIGURE 14: Courbe représentative de la hauteur de chute H (en mètre) en fonction de $\frac{gt}{v_t}$

34. Estimer numériquement la valeur de la vitesse limite atteinte v_t ainsi que l'ordre de grandeur de la hauteur de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite. Les gouttes ont-elles atteint leur vitesse limite lorsqu'elles viennent rencontrer la surface du disdromètre ?

B.2. Confrontation aux données expérimentales

35. Gunn et Kinzer ont mesuré la vitesse limite atteinte par des gouttes de pluie de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$: ils ont obtenu $v_t = 883 \text{ cm.s}^{-1}$, avec une incertitude-type associée à cette mesure valant $u(v_t) = 6 \text{ cm.s}^{-1}$. Cette donnée expérimentale est-elle compatible avec votre prédiction théorique ?

B.3. Une seconde modélisation plus adaptée de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2,0 \text{ mm}$

Formule empirique pour le calcul de la vitesse limite atteinte

Dans le modèle précédent, de nombreux éléments ont été écartés de la modélisation. On n'a pas tenu compte en particulier de la déformation des gouttes lors de leur chute, de phénomènes de vibration de celles-ci, de départ de matière... De nombreux chercheurs ont travaillé à la recherche d'une relation empirique permettant de prédire la vitesse limite d'une goutte de pluie en fonction de son diamètre D . L'équipe de Uplinger [6] a proposé par exemple la relation empirique suivante, valable pour des gouttes de diamètre $D \leq 4 \text{ mm}$, que l'on adoptera par la suite :

$$v_t(D) = 4.85 \times D \times \exp(-0.195 \times D)$$

6. W. G. Uplinger. A new formula for raindrop terminal velocity. *Proceedings of the 20th Conference Radar Meteorology. American Meteorological Society. Boston* (389-391), nov 1981

où D est le diamètre de la goutte exprimé en mm .

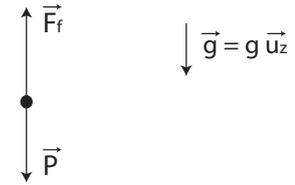
36. Faire l'application numérique de v_t à partir de cette relation empirique et comparer à la mesure expérimentale.

Hauteur de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite

On s'appuie sur le modèle proposé par l'équipe de Valette [7] et présenté dans le document 1 pour calculer la hauteur de chute nécessaire pour qu'une goutte de rayon $R = 2$ mm atteigne sa vitesse limite v_t .

Document 1 :

Le modèle proposé par l'équipe de Valette s'appuie, comme dans l'approche précédente, sur un bilan de forces sur une goutte ayant un volume équivalent à celui d'une sphère de diamètre D . Comme précédemment, on tient compte de deux forces : le poids $\vec{P} = P\vec{u}_z = m_{goutte} \cdot \vec{g} = \rho_e \cdot \frac{\pi}{6} D^3 g \vec{u}_z$ et la force de traînée \vec{F}_f .



Le modèle propose simplement de corriger la forme classique de la force de traînée de la manière suivante :

$$\vec{F}_f = -F_f(v)\vec{u}_z = -6\pi\eta\frac{D}{2}C_tC_d\vec{v}$$

Le coefficient C_t est justifié par le fait que les gouttes, lors de leur chute, vont causer des turbulences qui vont avoir tendance à augmenter les frictions entre la goutte et l'air. Les auteurs proposent l'expression $C_t = 1 + 0,16 \times Re^{2/3}$ pour traduire l'augmentation de la friction avec la turbulence. Le coefficient C_d est lié au fait que les gouttes de diamètre supérieur à 1 mm vont avoir tendance à se déformer et s'aplatir. Cela va conduire à une diminution de la vitesse limite par rapport à une sphère de même volume. Les auteurs proposent l'expression $C_d = 1 + a(We + b)^c - ab^c$ avec $a = 0,013$, $b = 2,28$ et $c = 2,12$ et We correspond au nombre de Weber sans dimension : $We = \frac{\rho_a \cdot v^2 D}{\sigma}$ avec $\sigma = 0,073$ N.m⁻¹ à 20°C.

Le modèle propose de calculer $v(t)$ par intégration de :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(P - F_f(v))$$

Le document 2 ci-après rappelle le principe de la méthode d'Euler permettant d'intégrer numériquement une équation différentielle.

7. G. Valette, S. Prévost, J. Léonard, L. Lucas. A virtual discrete rainfall simulator. *Environmental Modelling and Software*, 29 (51-60), 2012.

Document 2 : Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est une méthode de calcul itérative permettant de trouver une solution approchée d'une équation différentielle. Pour résoudre l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ avec la condition initiale $y(t = 0) = y_0$, on procède de la façon suivante :

1. On découpe l'intervalle de temps à explorer t_{tot} en $N - 1$ sous-intervalles de durée $dt = \frac{t_{tot}}{N - 1}$ et on définit les instants de date $t_i = i \cdot dt$, où i est un entier variant de 0 à $N - 1$.
2. La valeur approchée de la fonction y à l'instant t_{i+1} , notée y_{i+1} , est obtenue à partir de la valeur approchée de la fonction y à l'instant t_i , notée y_i , par : $y_{i+1} = y_i + dt \cdot f(t_i, y_i)$, avec $0 \leq i < N - 1$.

Le code Python ci-dessous permet d'intégrer numériquement l'équation différentielle portant sur la vitesse et présentée dans le document 1, en utilisant la méthode d'Euler.

```
1. from math import pi
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. # Données numériques nécessaires
4. g=9.81          # Intensité du champ de pesanteur
5. rhoe=1e3        # Masse volumique de la goutte d'eau
6. eta=1.81e-5     # Viscosité dynamique de l'air
7. rhoa=1.22      # Masse volumique de l'air
8. sigma=0.073    # Tension de surface de la goutte d'eau
9. # Définition de la masse de la goutte
10. def m(D):
11.     return rhoe*pi*D**3/6
12. # Définition du poids
13. def P(D):
14.     return g*m(D)
15. # Définition du nombre de Reynolds
16. def Re(v,D):
17.     return rhoa*v*D/eta
18. # Définition du nombre de Weber
19. def We(v,D):
20.     return rhoa*v**2*D/sigma
21. # Définition du coefficient Ct intervenant dans la force de traînée
22. def Ct(v,D):
23.     return 1+0.16*Re(v,D)**(2/3)
24. # Définition du coefficient Cd intervenant dans la force de traînée
25. a=0.013
26. b=2.28
27. c=2.12
28. def Cd(v,D):
29.     return 1+a*(We(v,D)+b)**c-a*b**c
30. # Définition de la force de traînée
31. def Ff(v,D):
32.     return 3*pi*eta*D*Ct(v,D)*Cd(v,D)*v
33. # Mise en application de la méthode d'Euler pour le calcul de la vitesse de la goutte et de la distance parcourue
34. def Euler(D,z0,v0,ttot,N):
35.     dt=ttot/(N-1) # Définition du pas de temps
36.     t=[0] # Condition initiale pour le temps
37.     v=[v0] # Condition initiale pour la vitesse
```

```

38.     z=[z0] # Condition initiale pour la position
39.     for i in range(N-1):
40.         A COMPLETER
41.         A COMPLETER
42.         A COMPLETER
43.     return t,z,v

```

37. Compléter la ligne 40 du code ci-dessus : cette ligne permet d'ajouter à la liste v des vitesses, la nouvelle valeur prise par la vitesse lorsque le temps a été à nouveau incrémenté. On rappelle que `list_name.append(item)` rajoute `item` à la liste `list_name`.
38. Compléter la ligne 41 du code ci-dessus : cette ligne permet d'ajouter à la liste z des positions verticales successives de la goutte, la nouvelle valeur prise par la position lorsque le temps a été à nouveau incrémenté.
39. Compléter la ligne 42 du code ci-dessus : cette ligne permet d'ajouter à la liste t des temps, la nouvelle valeur prise par le temps lors d'un nouvel incrément.

On fournit ci-dessous les courbes obtenues.

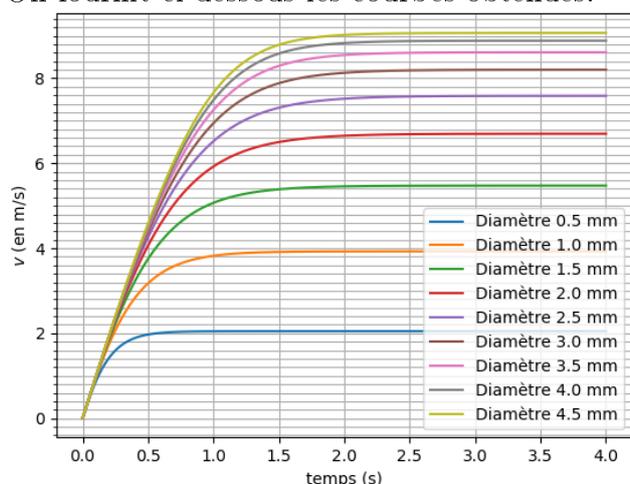


FIGURE 15: Courbe représentative de la vitesse de la goutte v en fonction du temps

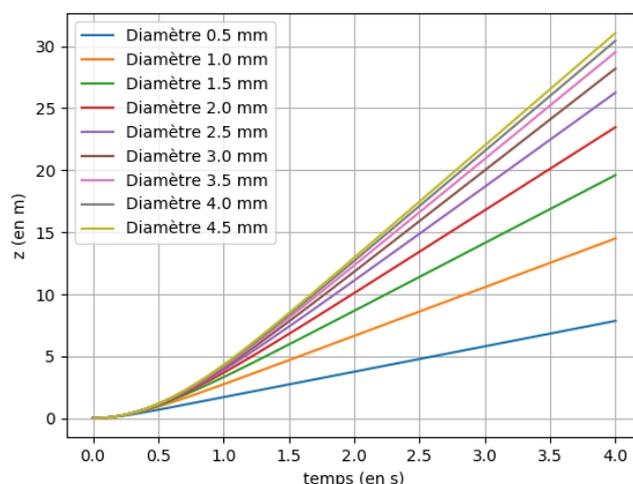


FIGURE 16: Courbe représentative de la position verticale z de la goutte en fonction du temps

40. Retrouver v_t pour $R = 2$ mm ainsi que l'ordre de grandeur de la distance H permettant d'atteindre v_t avec un écart de moins de 5 %.

C. MESURE DE L'INTENSITÉ DE LA PLUIE À L'AIDE D'UN DISDROMÈTRE MÉCANIQUE

C.1. Calcul de la force exercée par une goutte de pluie sur la surface sensible du disdromètre

Soit une goutte de pluie initialement sphérique de rayon R , atteignant avec une vitesse $\vec{v}_t = v_t \vec{u}_z$ la surface plane d'un disdromètre supposée rigide, cette vitesse étant définie par rapport au référentiel

terrestre \mathcal{R}_t supposé galiléen. \vec{u}_z est un vecteur unitaire vertical descendant.

On s'appuie sur la modélisation proposée par B.A.T. Petersson [8] pour calculer la force exercée par la goutte sur la surface du disdromètre. Ce modèle est présenté dans le document 3 ci-après.

Document 3 : L'équipe de B.A.T. Petersson propose la modélisation suivante pour le calcul de la force d'impact de la goutte sur la surface rigide du disdromètre :

1. Application de la seconde loi de Newton à la goutte impactant la surface rigide d'un disdromètre, dans \mathcal{R}_t galiléen :

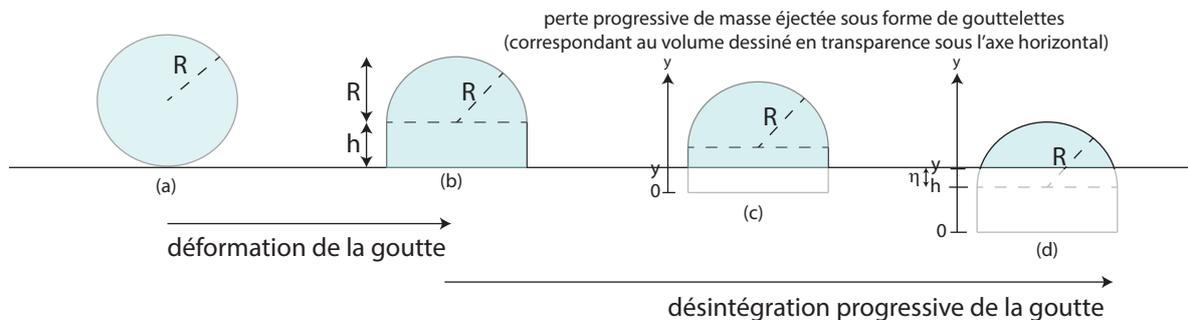
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{m\vec{v}}_{[1]} + \underbrace{\dot{m}\vec{v}}_{[2]}$$

où \vec{F} est la force exercée par la surface sur la goutte, m est la masse de la goutte encore agrégée et \vec{v} sa vitesse au cours de l'impact.

2. Décomposition de l'impact de la goutte sur la surface rigide du disdromètre en deux étapes :

- la première phase correspond à la déformation de la goutte au contact de la surface rigide (figure ci-dessous : étape de (a) à (b)) : cette étape se fait sans variation de masse. Seule la forme de la goutte évolue entre une forme sphérique parfaite de volume V et un cylindre de rayon R et de hauteur h surmonté d'une demi-sphère de rayon R , l'ensemble présentant le même volume que la sphère de départ. Au cours de cette phase, la goutte décélère a priori, on note : $v(t) = v_t - \Delta v$. Mais, cette étape de déformation étant de très courte durée, l'équipe de B.A.T. Petersson propose l'hypothèse suivante : $\Delta v \ll v_t$.

- la deuxième phase correspond à la désintégration progressive de la goutte : c'est le passage par les états successifs (b), (c), (d)... La masse $m(t)$ de la partie non désagrégée (représentée en gris au-dessus de l'axe horizontal) diminue au cours du temps : on représente en transparence dans les états (c) et (d), sous l'axe horizontal, le volume de la goutte qui a été éjecté sous forme de petites gouttelettes. La vitesse de la goutte déformée est constante et égale à v_t durant toute la phase de désintégration.



41. Identifier les termes [1] et [2], repérés dans le document 3 lors de l'application de la seconde loi

8. B. A. T. Petersson. The liquid drop impact as a source of sound and vibration. *Building Acoustics*, 2(585-624), 1996

de Newton, aux phases décrites précédemment et simplifier au maximum le calcul de la force en conséquence.

42. Exprimer la hauteur h de la partie cylindrique de la goutte dans l'état (b) en fonction de R .
43. On prend comme origine des temps, la configuration de la goutte dans l'état (b). Exprimer la hauteur $y(t)$ de la goutte qui s'est désagrégée à l'instant t , on a choisi l'origine $y = 0$ à la base de la goutte (les notations ont été précisées sur l'état (c) représenté dans le document 3).

On souhaite caractériser la masse $m(t)$ de la partie non désagrégée de la goutte lors de la phase de désintégration. On note ρ_e la masse volumique de la goutte d'eau.

On donne le volume $V(y_0)$ d'une calotte sphérique d'épaisseur y_0 et de rayon R (voir volume grisé sur la figure 17) :

$$V(y_0) = \int_0^{y_0} \pi(R^2 - y^2) dy$$

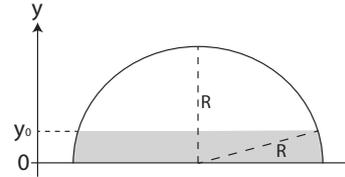


FIGURE 17: Définition du volume $V(y_0)$.

44. Montrer que la masse $m(t)$ de la partie non désagrégée de la goutte lors de la phase de désintégration s'écrit :

$$m(t) = \begin{cases} \rho_e \left[\frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 (h - y) \right] & y(t) \leq h \\ \rho_e \left[\frac{2}{3} \pi R^3 - \pi R^2 (y - h) + \pi \frac{(y-h)^3}{3} \right] & h \leq y(t) \leq h + R \end{cases}$$

45. En déduire l'expression de la norme de la force \vec{F} exercée par la surface sur la goutte, notée simplement $F(t)$, au cours du temps, durant la phase de désintégration. On distinguera le cas $t < \frac{2R}{3v_t}$ et les instants $\frac{2R}{3v_t} < t < \frac{5R}{3v_t}$.
46. Montrer que l'expression littérale de la valeur maximale de F , notée F_{max} , s'écrit :

$$F_{max} = \rho_e \cdot \pi (R \cdot v_t)^2$$

C.2. Mesure de l'intensité de la pluie

Soit une pluie de gouttes identiques, sphériques de rayon R , tombant sur la surface sensible d'un disdromètre mécanique d'aire $A = 6,36 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Le disdromètre mesure $N = 30$ impacts sur une durée $\Delta t = 1 \text{ min}$ et enregistre une force maximale exercée par chaque goutte de pluie sur la surface de $F_{max} = 0,99 \text{ N}$. On admet la validité de la relation empirique proposée par Uplinger liant la vitesse v_t au diamètre D des gouttes, rappelée à la partie B.3.

47. Préciser l'équation numérique permettant de déduire le rayon R des gouttes (exprimé en mm) de la mesure de F_{max} . On ne cherchera pas à la résoudre.

48. Donner l'expression littérale de l'intensité de la précipitation I , définie par la hauteur d'eau mesurée au sol par unité de temps (exprimée en mm/h) en fonction de N , Δt , A et R . Procéder à l'application numérique, sachant que la résolution de l'équation obtenue à la question précédente fournit $R = 2,0$ mm.
49. Calculer littéralement puis numériquement le nombre de gouttes de pluie par unité de volume présentes dans l'atmosphère, ainsi que la distance typique entre les gouttes, lors de la chute de celles-ci.

Partie III - Étude d'un radar météorologique

Présentation simplifiée du radar météorologique : l'antenne du radar (circulaire de diamètre a) émet un rayonnement électromagnétique. La géométrie de l'antenne est conçue de manière à concentrer la puissance dans un angle solide le plus fermé possible (ouverture angulaire du lobe d'émission de l'ordre du degré). Lorsque ce rayonnement atteint une cible (des gouttes de pluie par exemple), une partie de l'énergie est absorbée, une autre est rétro-diffusée dans la direction du radar pour être reçue par l'antenne en mode réception, une autre est transmise dans la direction initiale, et le reste est diffusé dans les autres directions. L'amplitude du signal rétro-diffusé dépend de la nature, de la forme, et de la taille de la cible.

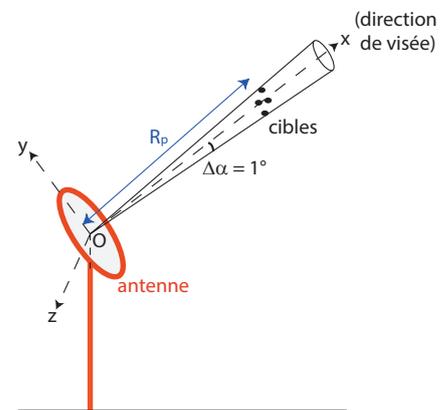


FIGURE 18: Radar météorologique

Objectifs de la partie III : on s'intéresse au cas où le radar pointe en direction d'une précipitation de gouttes d'eau. Deux mesures complémentaires peuvent être faites à l'aide du radar : la sous-partie A présente la détermination de la vitesse des gouttes d'eau dans la direction de visée, la sous-partie B revient sur la mesure à distance de l'intensité de la pluie.

A. MESURE DE LA VITESSE RADIALE DES HYDROMÉTÉORES

On s'intéresse au cas d'une onde monochromatique, de fréquence f_0 et de célérité dans le vide c , émise par le radar et qui est rétro-diffusée par une goutte, cette dernière se rapproche du radar à la vitesse constante $v \ll c$ dans la direction du radar. L'onde ainsi réfléchi par la cible mobile et reçue au niveau de l'antenne a une fréquence f_r différente de l'onde incidente.

50. Quel nom est donné à cet effet ? Donner un exemple de la vie courante l'illustrant.

51. Déterminer l'intervalle de temps séparant l'instant d'arrivée, sur la cible en mouvement, de deux crêtes successives d'une sinusoïde de fréquence f_0 émise par l'antenne et en déduire la fréquence f'_0 de la sinusoïde reçue par la cible en fonction de f_0 , v et c .
52. On suppose que la cible (en mouvement) émet une onde monochromatique de fréquence f'_0 en direction de l'antenne. Déterminer l'intervalle de temps séparant l'instant d'arrivée sur l'antenne de deux crêtes successives de cette sinusoïde de fréquence f'_0 émise par la cible et en déduire f_r fréquence de la sinusoïde reçue par l'antenne en fonction de f'_0 , v et c .
53. En déduire l'expression de la fréquence f_r en fonction de f_0 , v et c . Montrer qu'au premier ordre on obtient la relation :

$$f_r = \left(1 + \frac{2v}{c}\right) f_0$$

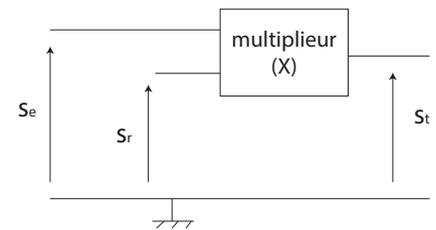
54. On donne $f_0 = 3,0$ GHz. Comparer f_0 et f_r pour une valeur usuelle de v dans le cadre de la météorologie. Que penser d'une mesure directe de f_r dans le but d'en déduire v ?

Au niveau de l'antenne du radar, on dispose de deux tensions sinusoïdales correspondant à l'image des ondes électromagnétiques émise et réceptionnée par le radar. On note :

$s_e(t) = S_{me} \cos(2\pi f_0 t)$ la tension image de l'onde émise,

$s_r(t) = S_{mr} \cos(2\pi f_r t + \phi)$ la tension image de l'onde réceptionnée.

On propose ci-dessous de construire un montage électrique permettant la mesure du décalage en fréquence $\Delta f = f_r - f_0$.



Le premier étage du montage correspond à l'utilisation d'un multiplicateur, celui-ci réalise l'opération : $s_t(t) = K \cdot s_e(t) \cdot s_r(t)$.

FIGURE 19: Structure du premier étage du montage électrique

55. On fournit la formule trigonométrique suivante : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$. Linéariser l'expression de $s_t(t)$.
56. En déduire l'allure du spectre en amplitude de la tension $s_t(t)$.

On souhaite appliquer, en entrée d'un circuit approprié, la tension $s_t(t)$ précédente et obtenir en sortie une tension $s_s(t)$ de la forme :

$$s_s(t) \approx K' \cdot \cos(2\pi \Delta f t + \phi) \text{ avec } \Delta f = f_r - f_0$$

57. Quelle doit-être la fonction du circuit retenu permettant d'obtenir la tension $s_s(t)$?

58. Proposer un circuit réalisant la fonction envisagée à la question précédente. On proposera un schéma électrique de ce circuit faisant apparaître les tensions s_s et s_t et on précisera comment choisir en pratique les valeurs des composants retenus pour obtenir effectivement une tension de sortie $s_s(t)$ ayant la forme précédemment décrite.

On donne ci-dessous la courbe représentant $s_s(t)$.

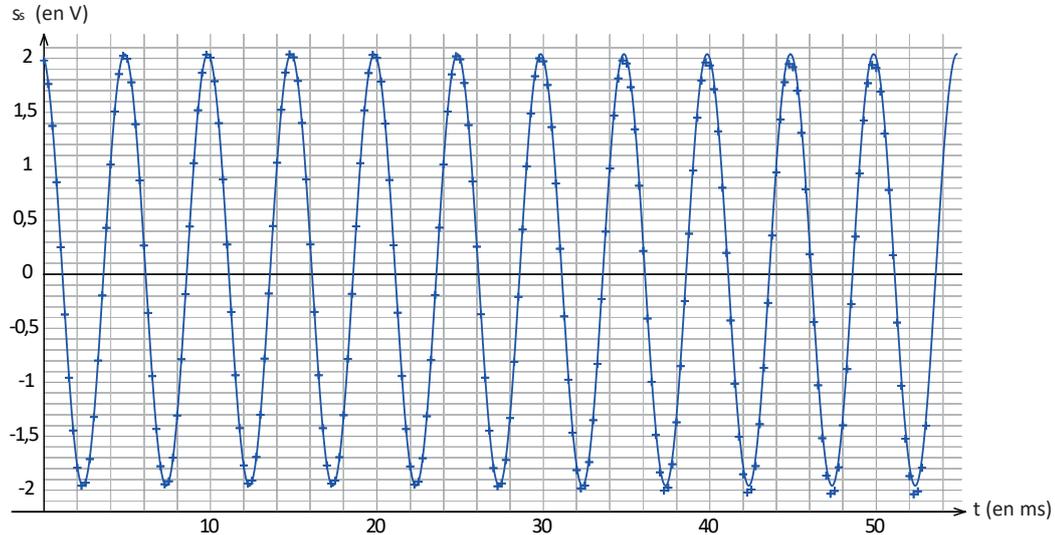


FIGURE 20: Courbe représentative de la tension s_s en fonction du temps

59. Déterminer la vitesse radiale des gouttes.

B. MESURE DU TAUX DE PRÉCIPITATION À L'AIDE D'UN RADAR

B.1. Puissance rayonnée par l'antenne du radar

L'antenne du radar météorologique est une antenne circulaire de diamètre a , qui rayonne uniformément dans un cône de révolution de sommet O , et de très faible largeur angulaire. On note \mathcal{P}_{emis} la moyenne temporelle de la puissance totale rayonnée par le radar et on suppose que la puissance rayonnée est nulle à l'extérieur de ce cône. On note $S(R_p)$ la surface, centrée sur le point P , qui est interceptée à une distance R_p par ce cône (voir figure 21).

Cette puissance rayonnée est associée à la propagation, depuis l'antenne du radar, d'une onde électromagnétique monochromatique de fréquence $f_0 = 3,0 \text{ GHz}$, que l'on assimilera à une onde plane harmonique polarisée rectilignement. On notera le champ électrique associé de la façon suivante : $\vec{E} = E_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t - k \cdot x) \vec{u}_z$. Ce champ sera supposé uniforme sur toute la surface interceptée $S(R_p)$.

En dehors des zones de précipitations, l'air sera assimilé au vide.

On rappelle la définition du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$: $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

On rappelle également la relation qui lie le champ électrique \vec{E} au champ magnétique \vec{B} dans le vide pour l'onde électromagnétique plane progressive harmonique considérée : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide.

60. Reproduire sur votre copie la figure 21 et faire apparaître les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et le vecteur d'onde \vec{k} . Rappeler la relation liant entre elles les normes des vecteurs \vec{E} et \vec{B} . Donner l'expression littérale du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ au point P .
61. Donner l'expression littérale de \mathcal{P}_{emis} , moyenne temporelle de la puissance électromagnétique reçue par la surface $S(R_p)$, en fonction de E_0 , c , μ_0 et $S(R_p)$.

B.2. Équation du radar

On s'intéresse maintenant à l'action de ce champ électromagnétique sur une goutte d'eau située en ce même point P . La goutte d'eau sera assimilée à une sphère de diamètre $D \ll \lambda$ de sorte que l'onde est bien uniforme sur tout le volume de la goutte.

Placée dans ce champ électromagnétique, la goutte d'eau se comporte comme un dipôle oscillant situé en P et rayonne une onde électromagnétique de même fréquence f_0 . On note $\mathcal{P}_{rd,s}(r)$ la moyenne temporelle de la puissance surfacique rétro-diffusée, à une distance r de la goutte, dans la direction de l'antenne du radar.

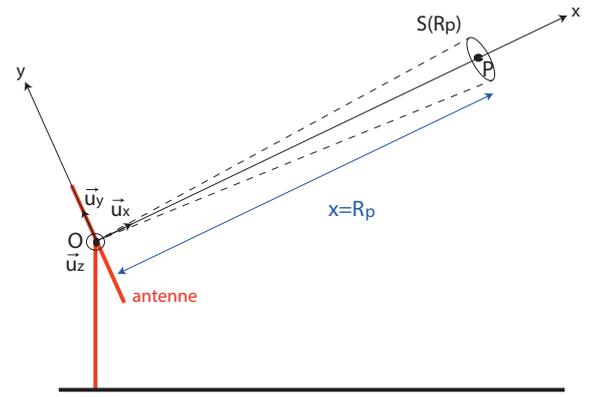


FIGURE 21: Notations

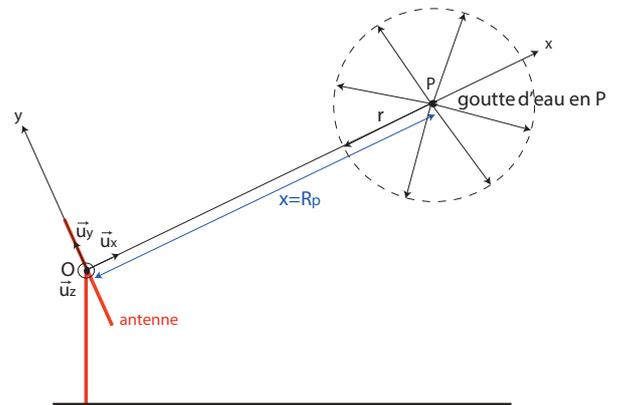


FIGURE 22: Notations en présence de la goutte d'eau en P

On admet que chaque goutte recevant l'onde électromagnétique émise par le radar se comporte comme une cible idéale, présentant une surface σ perpendiculaire au vecteur d'onde de l'onde incidente. Cette surface σ , que les radaristes appellent **surface équivalente radar**, est définie de la manière suivante : la puissance électromagnétique incidente traversant σ est égale à la puissance totale diffusée par la goutte en supposant qu'elle émet de manière omnidirectionnelle une puissance surfacique égale à la puissance surfacique rétro-diffusée $\mathcal{P}_{rd,s}(r)$ à une distance r de la goutte. Dans ces conditions, on montre que la surface équivalente radar de la goutte peut s'écrire :

$$\sigma = \pi^5 |\underline{K}|^2 \frac{D^6}{\lambda^4}, \text{ où } \lambda = c/f_0 \text{ et } |\underline{K}|^2 = 0,93 \text{ pour une goutte d'eau aux fréquences considérées}$$

62. Soit une goutte entièrement comprise dans le lobe d'émission du radar et située à une distance R_p de celui-ci. Exprimer la puissance surfacique $\mathcal{P}_{rd,s}(R_p)$ rétro-diffusée par une goutte, à une distance R_p de la goutte en fonction de \mathcal{P}_{emis} , $S(R_p)$, R_p et σ .
63. En admettant que l'antenne en réception a une surface équivalente égale à sa surface, quelle est, en fonction de \mathcal{P}_{emis} , $S(R_p)$, R_p , σ et a la puissance \mathcal{P}_{recue} par l'antenne de la part d'une goutte ?
64. Donner l'expression littérale de \mathcal{P}_{recue} en fonction de \mathcal{P}_{emis} , $|\underline{K}|^2$, D , a , $S(R_p)$, λ et R_p .

65. Le radar émet en fait des "impulsions", c'est-à-dire qu'il émet des ondes électromagnétiques monochromatiques de fréquence f_0 , mais uniquement sur une durée $\tau \gg 1/f_0$, ces impulsions se répétant régulièrement (voir figure 23, en haut). Pour chaque impulsion, le radar sonde ainsi un volume $V(R_p)$ contenant un grand nombre de gouttes (voir figure 23, en bas). On note n la densité volumique de gouttes et on suppose que celles-ci sont toutes identiques. Chacune de ces gouttes va rétro-diffuser de la puissance en direction de l'antenne. Montrer que la puissance totale reçue par l'antenne $\mathcal{P}_{recue,tot}$, suite à l'ensemble des gouttes sondées par une seule impulsion, s'écrit :

$$\mathcal{P}_{recue,tot} = \mathcal{P}_{emis} \frac{a^2 c \tau \pi^5 |\underline{K}|^2}{16 R_p^2 \lambda^4} n D^6$$

La relation précédente correspond à l'**équation du radar**.

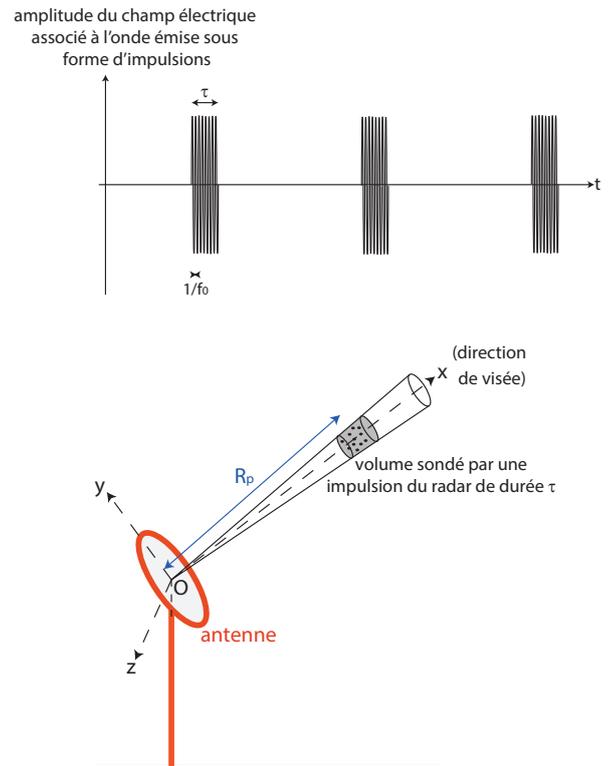


FIGURE 23: En haut : chronogramme des émissions du radar. En bas : illustration du volume sondé par une impulsion émise par le radar

On définit le facteur de réflectivité du radar Z pour un ensemble de gouttes monodisperses par :

$$Z = nD^6$$

De plus, tant que $D < \lambda/10$, une relation empirique lie l'intensité de précipitation I (en mm/h) à ce coefficient Z (en mm^6/m^3) : c'est la loi de Marshall-Palmer valable pour des latitudes moyennes :

$$Z = 200 \times I^{1.6} \text{ avec } Z \text{ en } \text{mm}^6/\text{m}^3 \text{ et } I \text{ en mm/h}$$

66. La distance R_p séparant le radar d'une précipitation de gouttes d'eau monodisperses étant connue, expliquer comment un radar peut procéder pour en déduire l'intensité de précipitation I .
67. Application numérique : on considère le cas d'une pluie détectée à $R_p = 50$ km et telle que $\frac{P_{\text{recue,tot}}}{P_{\text{emis}}} = 1,3 \cdot 10^{-14}$. On donne respectivement le diamètre a de l'antenne et la durée τ des impulsions : $a = 4,0$ m et $\tau = 5,0$ μs . Calculer numériquement l'intensité I de la pluie.